

Let's talk: rythme du cours. tout bon on dirait

Rappel: $ay'' + by' + cy = q(x)$ $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.

On trouve 2 sol lin. indép. de $ay'' + by' + cy = 0$:
 $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ (💡 $y := e^{\lambda x} \Rightarrow ay'' + by' + cy = p(\lambda)e^{\lambda x}$)

$b^2 - 4ac > 0$: $a\lambda^2 + b\lambda + c = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

$b^2 - 4ac = 0$: $a\lambda^2 + b\lambda + c = a(\lambda - \lambda_0)^2$. $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$, $y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$

$b^2 - 4ac < 0$: $a\lambda^2 + b\lambda + c = a(\lambda - (\lambda_0 + i\mu_0))(\lambda - (\lambda_0 - i\mu_0))$
 $y_1(x) = e^{\lambda_0 x} \sin(\mu_0 x)$, $y_2(x) = e^{\lambda_0 x} \cos(\mu_0 x)$.
 (Handwritten notes in pink: $(\lambda_0 + i\mu_0)x$, $e^{(\lambda_0 + i\mu_0)x} = e^{\lambda_0 x} (\cos(\mu_0 x) + i \sin(\mu_0 x))$)

Méthode 1.34 (polynôme cara + variation de la constante)

Soit $ay'' + by' + cy = q(x)$ une EDO d'ordre 2 linéaire à coefficients constants ($a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$)

Étape 1: polynôme caractéristique

On trouve y_1, y_2 2 solutions lin. indép. de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

$\Rightarrow$ solution générale de l'équation homogène

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Étape 2 On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$.

où C_1 & C_2 sont des solutions du système

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = \frac{1}{a} \cdot q(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \cdot q(x) \end{pmatrix}$$

Le problème algébrique donne C_1' & C_2' , en prenant les primitives, on obtient C_1 & C_2 . $y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$ est une solution particulière, et la solution générale est

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Remarque 1.40 3 questions

- 1) Est-ce que ça marche?
- 2) Le problème algébrique a-t-il toujours une solution?
- 3) D'où ça sort?

Réponses:

1) OUI : on injecte $y_p(x)$ dans l'équation

$$y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0$$

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \cancel{C_1'(x)} y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + \cancel{C_2'(x)} y_2(x) + C_2(x) y_2'(x) \\ &= C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) \end{aligned}$$

$$y_p''(x) = \underbrace{C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x)}_{= \frac{1}{a} \cdot q(x)} + \underbrace{C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x)}$$

$$= C_1(x) y_1''(x) + C_2(x) y_2''(x) + \frac{1}{a} q(x)$$

$$a \cdot y_p''(x) + b y_p'(x) + c y_p(x) = q(x) + C_1(x) (\cancel{a y_1''(x)} + b y_1'(x) + c y_1(x)) + C_2(x) (\cancel{a y_2''(x)} + b y_2'(x) + c y_2(x))$$

$= 0$ $= 0$

$$= q(x)$$

2) OUI du moment que y_1 & y_2 sont lin. indép.
on le verra après.

3) OUI (ça vient de l'équivalence $\text{eqn deg 2} \Leftrightarrow \text{systeme deg 1}$)

Définition 1.41 Wronskien

Soit $ay'' + by' + cy = q(x)$ une EDO d'ordre 2 linéaire à coeffs constants, et y_1, y_2 deux solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.

Le Wronskien de y_1 & y_2 est défini par

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Proposition 1.42

Soit $ay'' + by' + cy = q(x)$ une EDO d'ordre 2 linéaire à coeffs constants, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $y_1, y_2 \in C^1(I)$

deux solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$,
et leur Wronskien $W[y_1, y_2](x)$.

Alors :

(i) on a soit $\forall x \in I \quad W[y_1, y_2](x) = 0$ ou $\forall x \in I, W[y_1, y_2](x) \neq 0$

(ii) y_1 et y_2 sont lin. indép. si et seulement si
 $\forall x \in I, W[y_1, y_2](x) \neq 0$.

Remarque 1.43 (i) cette proposition assure que si y_1 & y_2 sont lin. indép. le problème algébrique dans la variation de la constante a toujours une solution.

(ii) En utilisant la formule pour l'inverse d'une matrice 2×2 , on a la formule

$$C_1'(x) = \frac{-y_2(x) \cdot q(x)}{a \cdot W[y_1, y_2](x)}$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x) \cdot q(x)}{a \cdot W[y_1, y_2](x)}.$$

Exemple 1.44 (i) Soit l'EDO $y'' + y' - 2y = 3 - 2x^2$.

Étape 1: poly cara: $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) \rightarrow$ deux racines réelles distinctes $-2, 1$ et donc $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-2x}$

sont deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + y' - 2y = 0$

Étape 2: var de la const. On cherche y_p de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-2x}$$

où C_1 & C_2 sont solution de

$$\begin{cases} e^x C_1'(x) + e^{-2x} C_2'(x) = 0 & (1) \\ e^x C_1'(x) - 2e^{-2x} C_2'(x) = 3 - 2x^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2): 3e^{-2x} C_2'(x) = 2x^2 - 3$$

$$\Rightarrow C_2'(x) = e^{2x} \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right)$$

$$(1) \Rightarrow e^x C_1'(x) = -e^{-2x} C_2'(x) = 1 - \frac{2}{3}x^2$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = e^{-x} \left(1 - \frac{2}{3}x^2 \right)$$

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= -2e^{-x} - e^{-x} \\ &= -3e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{y_2(x)\varphi(x)}{a \cdot W[y_1, y_2](x)} \\ &= \frac{-e^{-2x}(3-2x^2)}{-3e^{-x}} \end{aligned}$$

$$= e^{-x} \left(1 - \frac{2}{3}x^2 \right)$$

$$\text{idem} \\ C_2'(x) = e^{2x} \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right)$$

→ Primitives (IPP : dérive la partie polynomiale & intègre la partie exponentielle)

$$C_1(x) = \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)e^{-x} + K_1$$

$$C_1(x) \cdot y_1(x) =$$

$$C_2(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)e^{2x} + K_2 \quad \int \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)e^{-x} + K_1 \Big] e^x$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$= \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + K_1 e^x + K_2 e^{-2x}$$

$$= x^2 + x + K_1 e^x + K_2 e^{-2x}$$

$\Rightarrow$ la solution générale est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = x^2 + x + K_1 e^x + K_2 e^{-2x}.$$

(ii) Serif 1' EDO $y'' - 2y' + 2y = e^x$

Étape 1: poly cara

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 \rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i$$

$$y_1(x) = e^{\operatorname{Re}(1+i) \cdot x} \cos(\operatorname{Im}(1+i)x) = e^x \cos(x)$$

$1-i$

$e^x \cos(x)$

$$y_2(x) = e^{\operatorname{Re}(1+i)x} \sin(\operatorname{Im}(1+i)x) = e^x \sin(x)$$

$-e^x \sin(x)$

Étape 2: var de la const.

On cherche y_p de la forme $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

$$\text{On a } W[y_1, y_2](x) = e^x \cos(x) (e^x \sin(x) + e^x \cos(x))$$

$$- e^x \sin(x) (e^x \cos(x) - e^x \sin(x)) = e^{2x} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) = e^{2x}$$

$$C_1'(x) = - \frac{y_2(x) \varphi(x)}{a \cdot W[y_1, y_2](x)} = - \frac{e^x \sin(x) \cdot e^x}{1 \cdot e^{2x}} = -\sin(x)$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x) \cdot \varphi(x)}{a \cdot W[y_1, y_2](x)} = \frac{e^x \cos(x) \cdot e^x}{1 \cdot e^{2x}} = \cos(x)$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \cos(x) + K_1, \quad C_2(x) = \sin(x) + K_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p(x) &= C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) \\ &= \cos(x) \cdot e^x \cos(x) + \sin(x) e^x \sin(x) + K_1 e^x \cos(x) \\ &\quad + K_2 e^x \sin(x) \end{aligned}$$

$$= e^x + K_1 e^x \cos(x) + K_2 e^x \sin(x).$$

$$\Rightarrow \text{la solution générale est } y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } y(x) = e^x + K_1 e^x \cos(x) + K_2 e^x \sin(x)$$

Méthode 1.45 (Poly carré + Coeffs réduits)

Soit une EDO d'ordre 2 linéaire à coeffs constants

$$ay'' + by' + cy = q(x) \quad (a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R})$$

Supposons que $q(x)$ ait une des formes suivantes:

$$q(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_n x^n \quad (\xi_i \in \mathbb{R}, c \neq 0)$$

$$q(x) = \xi_0 \sin(\mu x) + \xi_1 \cdot x \cdot \sin(\mu x) + \dots + \xi_n x^n \sin(\mu x) \\ + \eta_0 \cos(\mu x) + \eta_1 \cdot x \cdot \cos(\mu x) + \dots + \eta_n x^n \cos(\mu x) \quad \left(\begin{array}{l} \xi_i, \eta_i, \mu \in \mathbb{R} \\ a(i\mu)^2 + b i\mu + c \neq 0 \end{array} \right)$$

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x \cdot e^{\lambda x} + \dots + \xi_n x^n e^{\lambda x} \quad (\xi_i, \lambda \in \mathbb{R}, a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0)$$

$$q(x) = \sum_0 \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \sum_1 x \cdot \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \dots + \sum_n x^n \sin(\mu x) e^{\lambda x} \\ + \eta_0 \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \eta_1 x \cdot \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \dots + \eta_n x^n \cos(\mu x) e^{\lambda x}$$

$$(\xi_i, \eta_i, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad a(\lambda + i\mu)^2 + b(\lambda + i\mu) + c \neq 0)$$

Étape 1 poly carré, pour trouver y_h la solution générale de l'équation homogène

Étape 2: on pose $y_p(x)$ qui a la même forme que $q(x)$, on injecte dans l'équation et on trouve les coefficients pour que y_p soit bien une solution particulière.
On conclut que $y = y_p + y_h$ est la solution générale.

Exemple 1.46:

(i) soit l'EDO $y'' + y' - 2y = 3 - 2x^2$

Étape 1: idem que précédemment $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-2x}$

Étape 2 $q(x)$ a la forme $\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2$ avec

$$\xi_0 = 3, \xi_1 = 0, \xi_2 = -2.$$

On cherche $y_p(x)$ de la forme $y_p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ ni y_1 ni y_2 n'apparaissent + ✓

$$y_p'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x$$

$$y_p''(x) = 2\alpha_2 \quad . \quad \text{On a besoin que}$$

$$\begin{aligned} q(x) = 3 - 2x^2 &= 2\alpha_2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 x - 2\alpha_0 - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 x^2 \\ &= (2\alpha_2 + \alpha_1 - 2\alpha_0) + (2\alpha_2 - 2\alpha_1)x - 2\alpha_2 x^2 \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme

$$-2\alpha_2 = -2$$

$$2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$$

$$2\alpha_2 + \alpha_1 - 2\alpha_0 = 3$$

$\Rightarrow y_p(x) = x + x^2$ est une solution particulière de l'EDO

$\Rightarrow$ la solution générale est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = x + x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$